CHAPTER 1

Ángulos

1. Conceptos preliminares.

Una figura formada por dos rayos trazados desde el mismo punto se llama un **ángulo**. Los rayos que forman el ángulo se llaman sus **lados** y su extremo común se llama el **vértice** del ángulo. Se debe considerar que los lados se extendienden a partir del vértice indefinidamente.

Un ángulo se denota usualmente con tres letras mayúsculas donde la de en medio marca el vértice y las otras dos señalan un punto en cada uno de los lados. Se dice, por ejemplo, "el ángulo AOB" o "el ángulo BOA" (Figura 1). Es posible denotar un ángulo con una sola letra que marca el vértice siempre que no haya otros ángulos con el mismo vértice en el diagrama. A veces también denotaremos un ángulo con un número dentro del ángulo cerca de su vértice.

Los lados de un ángulo dividen al plano que contiene al ángulo en dos regiones. Una de ellas se llama la **región de adentro** del ángulo y la otra se llama la **región de afuera**. Usualmente se considera que la región de adentro es la que contiene los segmentos que unen cualesquiera dos puntos sobre los lados del ángulo, por ejemplo, los puntos A y B en los lados del ángulo AOB (Figura 1). Sin embargo a veces se necesita considerar la otra parte del plano como la parte de adentro. En casos tales algún comentario especial se hará para especificar cuál región del plano es la que se considera la de adentro. Ambos casos se representan por separado en la Figura 2, donde la región de adentro está sombreada en cada caso.

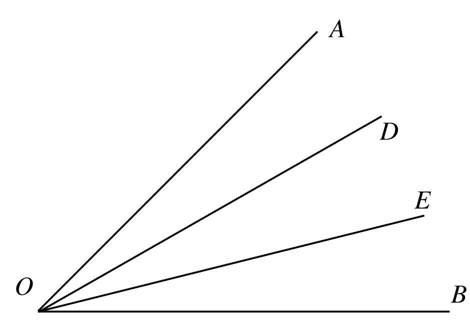

FIGURE 1

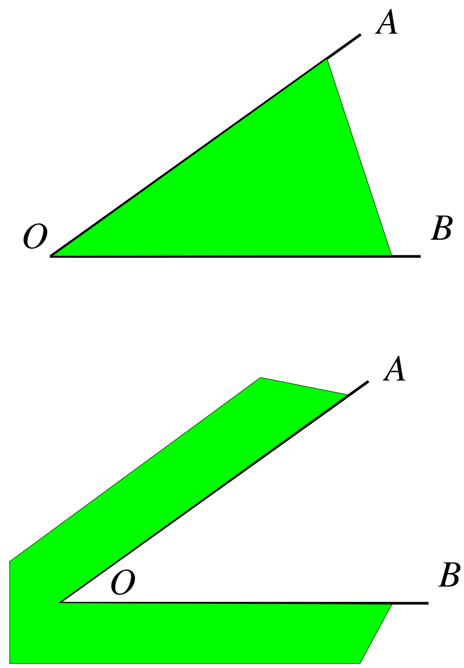

FIGURE 2

Los rayos trazados desde el vértice de un ángulo que están en su parte de adentro (OD, OE, Figura 1) forman nuevos ángulos (AOD, DOE, EOB) que se consideran como partes del ángulo ("AOB").

Al escribir, la palabra ángulo a menudo se reemplaza con el símbolo $\angle$. Por ejemplo, en lugar de "el ángulo AOB" se puede escribir $\angle AOB$.

2. Ángulos congruentes e incongruentes.

De acuerdo con la definición general de figuras congruentes (Apartado 1) *dos ángulos son congruentes si al mover uno de ellos es posible identificarlo con el otro.*

Supongamos por ejemplo que colocamos el ángulo AOB sobre el ángulo $A'O'B'$ (Figura 3) de tal manera que el vértice O coincide con O', el lado OB queda sobre OB' ylas regiones de adentro de ambos ángulos quedan en el mismo lado de la línea $O'B'$. Si resulta que OA coincide con $O'A'$, entonces los ángulos son congruentes. Si resulta que OA queda dentro o fuera del ángulo $A'O'B'$m entonces los ángulos son incongruentes y el que queda dentro se dice que es **más chico**.

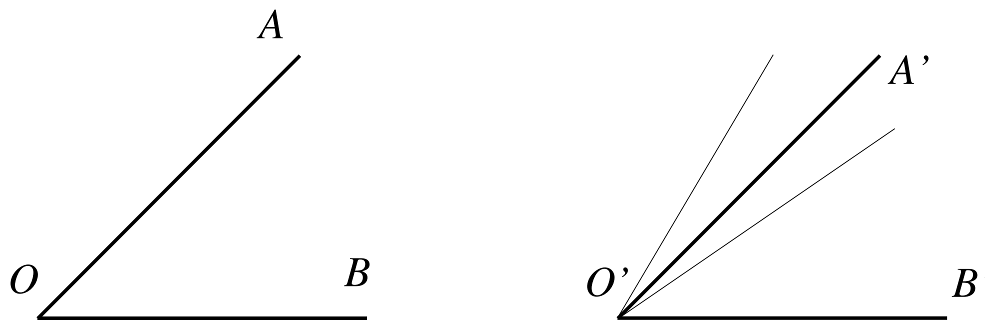

FIGURE 3

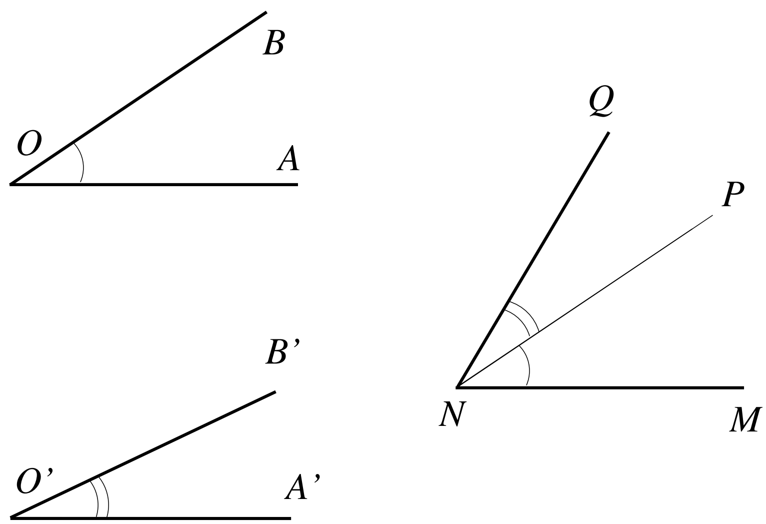

FIGURE 4

3. Suma de ángulos

La suma de los ángulos AOB y $A'O'B'$ (Figura 4) es un ángulo definido como sigue. Contruyamos un ángulo MNP congruente con el ángulo dado AOB y añadámosle el ángulp PNQ congruente al ángulo dado $A'O'B'$ como se muestra. A saber, el ángulo MNP debe tener el mismo vértice que el ángulo PNQ, un lado común NP y las regiones de adentro de ambos ángulosdeben estar en los lados opuestos del rayo común NP. Entonces el ángulo MNQ se llama la suma de los ángulos AOB y $A'O'B'$. La región de adentro de la suma se considera que es la parte del plano comprendida por las partes de adentro de los sumandos. Esta región contiene el lado común (NP) de los sumandos. De manera similar se puede formar la suma de tres o más ángulos.

La suma de ángulos obedece las leyes conmutativa y asociativa de la misma manera que la suma de segmentos. Del concepto de adición de ángulos se

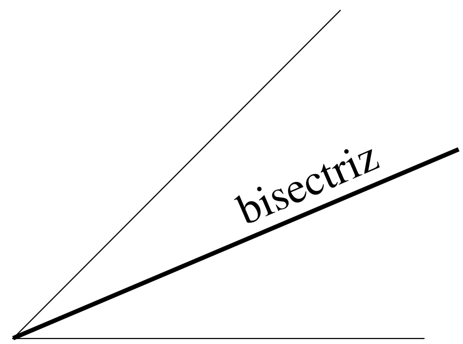

FIGURE 5

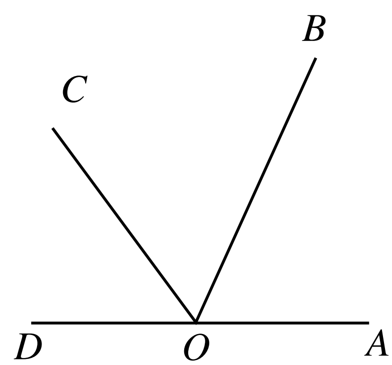

FIGURE 6

deriva el concepto de sustracción de ángulos y de multiplicación y división de ángulos con un número entero.

Muy a menudo se tiene que usar el rayo que divide un ángulo dado en dos mitades; este rayo se llama una **bisectriz** del ángulo (Figura 5).

4. Extensión del concepto de ángulo.

Cuando se calcula la suma de ángulos pueden ocurrir algunos casos que requieren atención especial.

(1) Es posible que después de sumar varios ángulos, digamos, los tres ángulos AOB, BOC y COD (Figura 6), el lado OD del ángulo COD es la continuación del lado OA del ángulo AOB. Obtenemos entonces la figura formada por dos rayos (OA y OD) trazados desde el mismo punto (O) y continuados uno después del otro. Tal figura se considera también un ángulo y se llama un ángulo **llano**.

(2) Es posible que después de sumar varios ángulos, digamos, los cinco ángulos AOB, BOC, COD, DOE y EOA (Figura 7), el lado OA del ángulo EOA coincide con el lado OA del ángulo AOB. La figura formada por

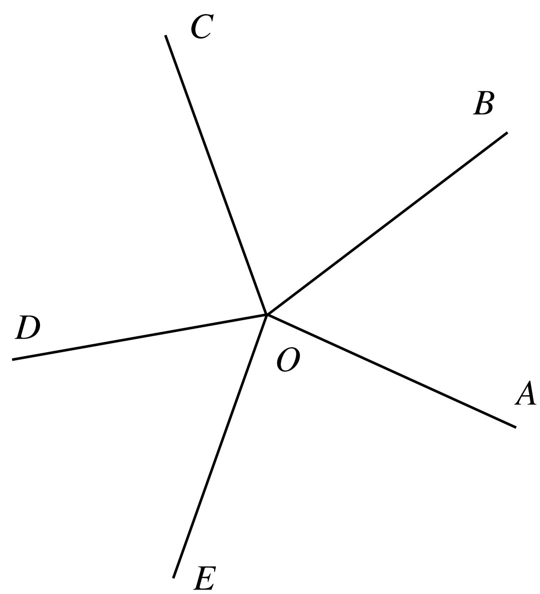

FIGURE 7

rayos tales (junto con el plano completo que rodea al vértice O) también se considera un ángulo y se llama un **ángulo completo** o **ángulo perigonal**.

(3) Finalmente es posible que los ángulos sumados no sólo llenen todo el plano al rededor del vértice común, sino que incluso se traslapen cubriendo el pano al rededor del vértice común por segunda vez, por tercera vez, y así sucesivamente. Una tal suma de ángulos es congruente con un ángulo completo sumado con otro ángulo, o es congruente con dos ángulos completos sumados con otro ángulo y así sucesivamente.

5. Ángulo central.

El ángulo (AOB, Figura 8) formado por dos radios de una circunferencia se llama un **ángulo central**; un ángulo tal y el arco contenido entre los lados de este ángulo se dice que *se corresponden* el uno al otro.

Los ángulos centrales y sus arcos correspondientes tienen las siguientes propiedades.

En un circunferencia o en dos circunferencias congruentes:

(1) *Si los ángulos centrales son congruentes, entonces los arcos correspondientes son congruentes;*

(2) y viceversa, *si los arcos son congruentes, entonces los ángulos centrales correspondientes son congruentes.*

Supongamos que $\angle AOB = \angle COD$ (Figura 9); tenemos que mostrar que los arcos AB y CD también son congruentes. Imaginemos que el sector AOB se

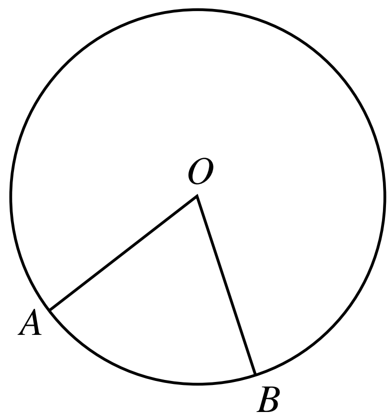

FIGURE 8

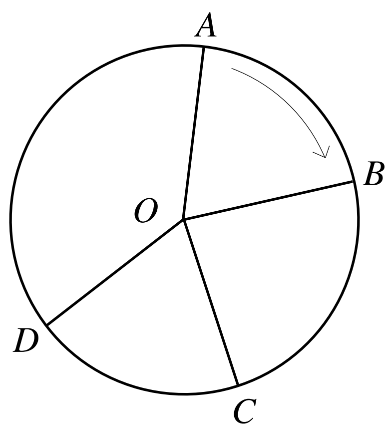

FIGURE 9

rota al rededor del centro O en la dirección de la flecha hasta que el radio OA coincide con OC. Entonces a causa de la congruencia de los ángulos, el radio OB coincide con OD; por lo tanto los arcos AB y CD coinciden también, i.e., son congruentes.

La segunda propiedad se establece de manera similar.

6. Grados circulares y angulares.

Imaginemos que una circunferencia se divide en 360 partes congruentes y todos los puntos de división están conectados al centro con radios. Entonces alrededor del centro se forman 360 ángulos centrales congruentes, pues son ángulos centrales que corresponden a arcos congruentes. Cada uno de estos arcos se llama un **grado circular** y cada uno de esos ángulos centrales se llama un **grado angular**. Luego se puede decir que un grado circular es un 1/360-avo de una circunferencia y el grado angular es el ángulo central que le corresponde.

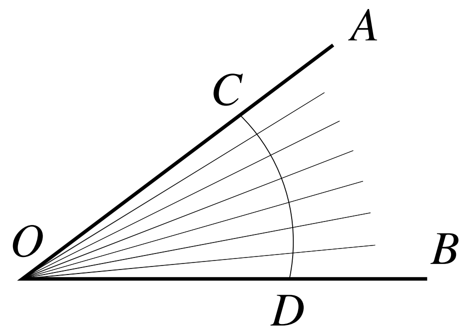

FIGURE 10

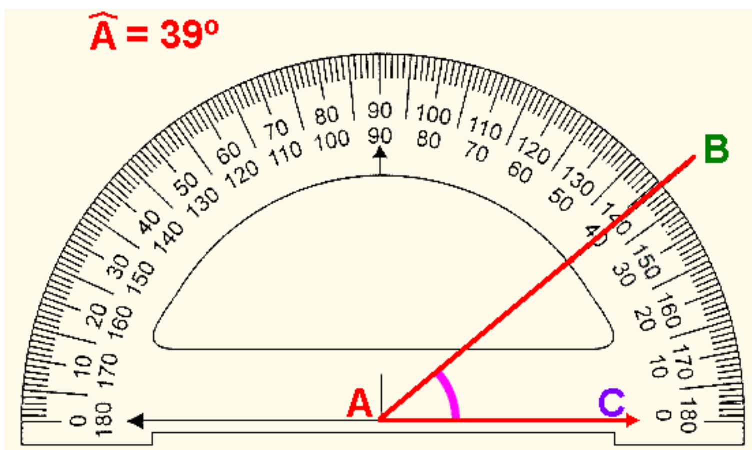

FIGURE 11

Los grados (tanto circulares como angulares) se subdividen en 60 partes congruentes llamadas **minutos** y los minutos se subdividen en 60 partes congruntes que se llaman **segundos**.

7. Correspondencia entre ángulos centrales y arcos.

Sea AOB un ángulo (Figura 10). Entre sus lados dibujemos un arco CD de radio arbitrario con centro en el vértice O. Entonces el ángulo AOB se vuelve el ángulo central que corresponde al arco CD. Supongamos, por ejemplo, que este arco consiste de 7 grados circulares (que se muestran amplificados en la Figura 10). Entonces los radios que conectan los puntos de división con el centro obviamente dividen al ángulo AOB en 7 grados angulares. Más generalmente se puede decir que *un ángulo se mide con el arco que le corresponde*, que quiere decir que un ángulo contiene tantos grados, minutos y segundos angulares como el arco correspondiente contiene grados, minutos y segundos circulares. Por ejemplo, si el arco CD contiene 20 grados 10 minutos y 15 segundos de unidades circulares, entonces el ángulo AOB consiste de 20 grados 10 minutos y 15 segundos de unidades angulares, lo que se acostumbra escribir como: $\angle AOB = 20°10'15''$ usando los símbolos °, ′ y ″ para denotar grados, minutos y segundos, respectivamente.

Las unidades de grado angular no dependen del radio de la circunferencia. En efecto al sumar 360 grados angulares siguiendo las reglas de la adición descritas en el Apartado 3, obtenemos el ángulo completo al rededor del centro de la circunferencia. Cualquiera que sea el radio de la circunferencia, este ángulo completo será el mismo. Luego puede decirse que un grado angular es 1/360-ava parte del ángulo completo.

8. Transportador.

Este instrumento (Figura 11) se usa para medir ángulos. Consiste de un semidisco cuyo arco está dividido en 180°. Para medir el ángulo DCE se coloca el transportador sobre el ángulo de tal manera que el centro del semidisco coincide con el vértice del ángulo y el radio CB está en el lado CE. Entonces el número de grados en el arco contenidos entre los lados del ángulo DCE es la medida del ángulo. Con el transportador también se puede trazar un ángula que contiene un número dado de grados (por ejemplo, 90°, 45°, 30°, etc.).

Ejercicios

(1) Traza un ángulo y con el transportador y la regla traza su bisectriz.
(2) En la parte de afuera de un ángulo dado traza otro ángulo congruente con éste. ¿Puedes hacer esto en la parte de adentro del ángulo dado?
(3) ¿Cuántos lados comunes pueden tener dos ángulos distintos?
(4) ¿Dos ángulos no congruentes pueden tener 55 grados angulares cada uno?
(5) ¿Dos ángulos no congruentes pueden tener 55 grados circulares cada uno? ¿Y si los arcos tienen el mismo radio?
(6) Dos rectas se intersecan en un ángulo que contiene 25°. Calcula las medidas de los tres ángulos restantes que estas líneas forman.
(7) Tres rectas que pasan por el mismo punto dividen al plano en seis ángulos. Dos de ellos contienen 25° y 50°, respectivamente. Calcula las medidas de los cuatro ángulos restantes.
(8) Usando sólo el compás consturye un arco de 1° sobre una circunferencia donde se tiene dado un arco de 19° sobre esta misma circunferencia.